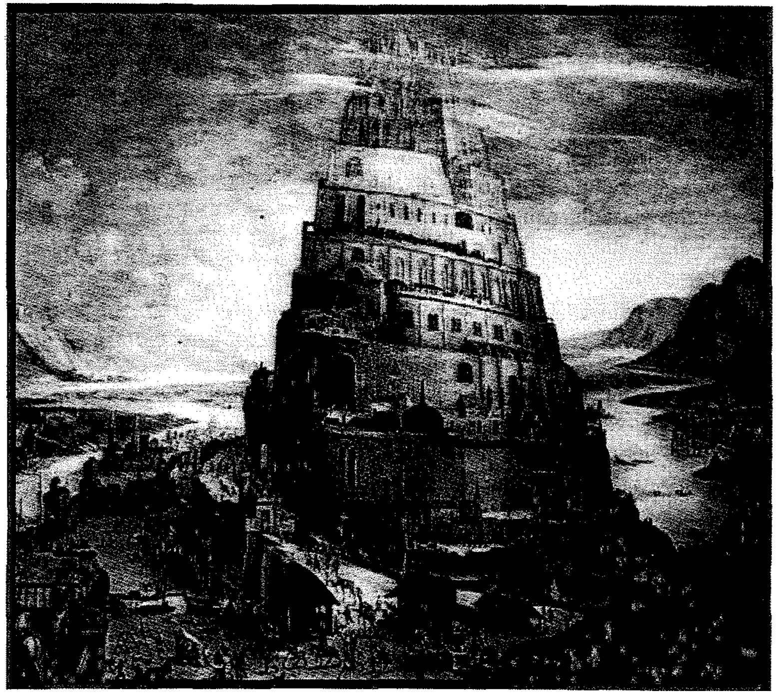
Associazione Subalpina
Mathesis

Seminario di Storia
delle matematiche
"Tullio Viola"

Conferenze e Seminari

2003-2004



Volume redatto a cura di
E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti

Conclusioni.

Come in tutti i suoi lavori, Frola conferma la sua attitudine a andare alla radice delle questioni studiate, a cercare di generalizzare i contesti in cui opera e di rimanere sempre entro un quadro rigidamente rigoroso

Non porta però mai a conclusione le sue premesse: ha delle intuizioni che lo pongono all'avanguardia per i suoi tempi, sicuramente influenza coloro che gli sono vicini (lo stesso Geymonat esplicitamente ammette una forte influenza sul suo pensiero), ma non porta mai a termine le sue indagini, tanto nella teoria dell'elasticità (cfr. [4]) che nella teoria delle trasformate di Watson (come ricordato da Tricomi [2]), che nella metodologia della matematica, come qui si è cercato di tratteggiare.

Non basta addurre a giustificazione di questa incompiutezza la malattia o l'interesse totalizzante per il buddismo. Già in precedenza Frola aveva sempre avuto questo comportamento: grande interesse per i problemi di fondo, spirito critico e acuta visione indagatrice, per lo più espressa colloquialmente con i colleghi del Centro o nelle conferenze, grande intuizione per le possibili vie da seguire. Poi sopravveniva una caduta di interessi e anche di volontà di approfondire i temi enunciati, di scrivere lavori più compiuti e pubblicarli in sedi più appropriate di quelle usualmente scelte.

In tal modo le sue idee, anche a livello embrionale, sono rimaste sconosciute agli stessi esperti dei vari settori da lui toccati e certo, con un piccolo sforzo Frola avrebbe potuto vedere riconosciuti i suoi meriti e occupare un posto di maggior rilievo nella storia della matematica.

Bibliografia

[1] L. Geymonat 1961/62, *Eugenio Frola*, Atti Accad. Sc. Torino, v. 151, p. 986-997

[2] F. Tricomi 1967, *La mia vita di matematico attraverso la storia dei miei lavori*, Padova, Cedam

[3] F. Pastrone 1998, *Fisica Matematica e Meccanica Razionale.* In: La Matematica Italiana dopo l'Unità. Gli Anni tra le Due Guerre Mondiali (acura di S. Di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi) Milano, Marcos , p. 381-504

[4] S. Caparrini and F. Pastrone 2003, E. Frola (1906-1962): *An Attempt Towards an Axiomatic Theory of Elasticity*, J. of Elasticity, v. 72, p. 43-55

[5] L. Giacardi, S. Roero 1998, *L'eredità del Centro di Studi Metodologici di Torino.* In: Quaderni di Storia dell'Università di Torino, v. 2, p. 289-356

[6] L. Geymonat 1964, *Il significato del contributo di Eugenio Frola alla rinascita della metodologia della scienza in Italia.* In: E. Frola, Scritti Metodologici, (a cura di L. Geymonat), Torino, p. 7-33

[7] E. Frola 1964, *Scritti Metodologici,* (a cura di L. Geymonat), Torino, Giappichelli

[8] E. Frola 1947, *La matematica come lingua chiusa e la conoscenza del mondo fisico.* In: Fondamenti logici della scienza, Torino, De Silva, p. 91-109

[9] E. Frola 1948, *Critica dei rapporti logici a metodologici tra la matematica e le sue applicazioni tecniche*, Atti del Centro di Studi Met., v. 1. p. 21-24

[10] E. Frola 1954, *Su un articolo di Fialdelfo Insolera apparso sul «Giornale di Matematica Finanziaria,* Atti Accad. Sc. Torino, v. LXXXVIII, p. 3-5

[11] E. Frola e B. Leoni 1955, *Possibilità di applicazione delle matematiche alle discipline economiche*, Il Politico, v. XX, p. 265-270

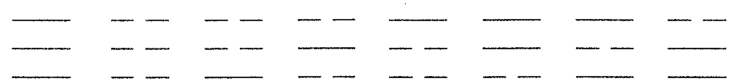
Torino, 30 ottobre 2003

DAGLI ESAGRAMMI DI FU-HI ALL'ARITMETICA BINARIA: LEIBNIZ E PEANO*

ERIKA LUCIANO – CLARA SILVIA ROERO

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

La storia della numerazione binaria e delle sue applicazioni ha origini molto antiche. Viene fatta risalire al celebre testo sapienziale *I Ching* o *Libro delle variazioni*, attribuito all'imperatore Fu-hi, fondatore della scrittura e della civiltà cinese. Secondo una tradizione leggendaria, accolta ai tempi di Leibniz, si pensava risalisse addirittura al secondo millennio a. C., ma studi più recenti lo datano al 300 a. C. L'opera ha avuto nel corso della storia molteplici interpretazioni e vari utilizzi. Collegata alla filosofia, alla teologia, all'astronomia e alla medicina, era usata nelle pratiche mediche, nelle arti divinatorie e nelle previsioni del futuro, come talismano e portafortuna. Stretta infatti era l'unione con la teoria filosofica cinese delle due forze *Yin* e *Yang*, in lotta fra loro, spesso rappresentate nel cerchio con i simboli dicotomici nero e bianco. L'elemento *Yin* che indica l'oscurità, l'ombra e il male era anche rappresentato con una barretta spezzata, mentre l'elemento *Yang* era l'espressione della luce e del bene ed era visualizzato con la barretta intera. Se le barrette sono disposte su tre righe, esse formano tutti gli 8 possibili trigrammi (2^3 sono le combinazioni di 2 elementi a gruppi di 3), detti *kua* o *cova*, i cui significati spaziano negli ambiti più disparati (v. tav. 1 in AAVV 1971, p. 24):



I legami con la matematica e, in particolare, con l'aritmetica binaria sono sottolineati da Leibniz che si accosta al testo cinese anche per i risvolti filosofici e teologici connessi e a questi temi dedica, come vedremo, numerosi scritti.

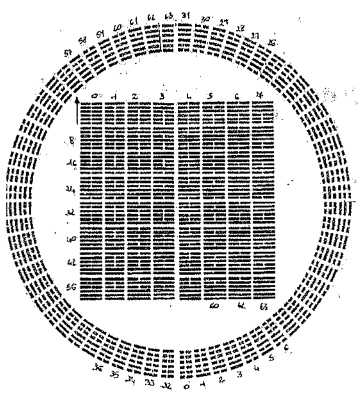
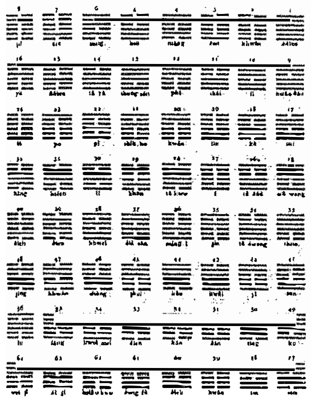


Fig. 1 Esagrammi - Ordinamento Fu-hi

Disposti due trigrammi uno sotto l'altro si costruiscono gli esagrammi, che ammontano in totale a 64. Questi ci sono stati tramandati secondo due diversi ordinamenti: quello di Fu-hi, detto anche naturale (fig. 1), trasmesso da J. Bouvet a Leibniz il 4 novembre 1701 e quello di Wen Wang (fig. 2), stampato nel *Confucius Sinarum philosophus* del 1687. Attribuendo alla barretta intera il numero 1 e a quella spezzata il numero 0 Leibniz identifica nel diagramma i primi 64 numeri naturali, in sistema binario, partendo in alto a sinistra con sei barre spezzate e terminando in basso a destra con sei barre intere.

* Ricerca eseguita nell'ambito del Progetto MIUR "Storia delle scienze matematiche", unità di Torino.

Fig. 2 Esagrammi - Ordinamento Wen Wang



La mancata specularità nello schema naturale gli permette l'immediata traduzione in scrittura diadica dei 64 numeri. Nell'altro ordinamento sarebbe stato più complicato riconoscere la successione numerica in sistema binario.

Prima di affrontare la travagliata vicenda connessa all'interpretazione leibniziana del sistema degli *esagrammi di Fu-hi*, al fine di valutarne la portata e i legami con gli studi aritmetici e di teoria dei numeri del periodo, ripercorriamo brevemente la storia anteriore della diadica.

Tra i primi autori che riconoscono alla numerazione in base 2 applicazioni interessanti ricordiamo Luca Pacioli che nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (1494) studia il problema di formare tutti i pesi con il minimo numero di pesi campione e conclude che se si utilizza la progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16 si riescono a formare con cinque soli pesi campione ben 31 pesi. Ripresa, senza menzionarne la fonte, da Niccolò Tartaglia nel suo *General trattato di numeri e misure* (1556) e da Claude Bachet de Méziriac nei *Problemes plaisans et delectables* (1612), la trattazione di Pacioli è adottata in Inghilterra dove il sistema di pesi e misure e le monete seguono ancor oggi la numerazione binaria.[1] Non è dunque un caso che dobbiamo all'inglese John Napier la prima esposizione sistematica dei pregi dell'aritmetica diadica nella *Rabdologi* (1617). Napier mostra fra l'altro il modo di semplificare le operazioni servendosi di bastoncini numerati, che ancor oggi portano il suo nome. Il sistema basato sulle due sole cifre 0 e 1 permette di scrivere ogni numero intero come somma di potenze di 2 e non c'è più bisogno delle tavole per l'addizione e per la moltiplicazione, dal momento che 1+1=10, 1+0=1 e 1x0=0, 1x1=1. Calcolare può diventare un gioco: i numeri sono rappresentati con gettoni o pedine su una scacchiera e spostando convenientemente le pedine con poche regole si eseguono calcoli anche molto complessi. Nel *De dignitate et augmentis scientiarum* (1623) di Francis Bacon si trova invece la prima rappresentazione dell'alfabeto con i primi 32 numeri in base due. Ottenuti con un sistema biletterale, cioè servendosi delle sole lettere *a*=0 e *b*=1, Bacon riesce ad esprimere ogni pensiero con una tecnica analoga a quella poi adottata nel telegrafo.

1. Il susseguirsi delle ricerche di Leibniz sulla diadica

Gottfried Wilhelm Leibniz è considerato un antesignano dell'informatica e della cibernetica, tuttavia i suoi scritti sulla numerazione binaria, che costituiscono lo zoccolo teorico dell'attuale scienza dei calcolatori, sono poco studiati e la bibliografia secondaria in merito, peraltro assai scarna, tende ad enfatizzarne i risvolti storici e filosofici, a scapito di quelli matematici.

Occupandosi di diadica per oltre trent'anni della sua vita, seppure mai in modo sistematico, Leibniz lascia contributi di indiscutibile rilievo, orientando le sue ricerche verso un duplice obiettivo: da un lato lo studio teorico della progressione binaria gli consente di analizzarne le proprietà di regolarità e di periodicità, dall'altro egli reputa l'aritmetica in base 2 di sorprendente fecondità per le applicazioni pratiche, non solo nel campo dei pesi, delle monete e delle misure, ma anche in quello delle macchine da calcolo.

La produzione che Leibniz destina espressamente alla pubblicazione in quest'ambito consta di un solo scritto di una certa ampiezza e organicità: *L'esplication de l'arithmétique binaire qui se sert des seuls caractères 0 et 1, avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy*[2], cui si affiancano una decina di manoscritti[3], in larga parte ancora privi di edizione critica. Il filosofo e matematico tedesco intrattiene poi, a più riprese, interessanti scambi di opinioni sulla diadica, sia con matematici di calibro, fra cui i fratelli Johann e Jacob Bernoulli e i loro allievi J. Hermann e G. F. de l'Hôpital, sia con personaggi meno noti, come W. E. Tentzel, N. Witsen, C. Caze e C. M. Vota e, ancora, con i missionari gesuiti in Cina, P. Filippo Grimaldi e P. Joachim Bouvet.[4]

L'interesse di Leibniz per il sistema di numerazione binario scaturisce, con tutta probabilità nell'estate del 1663, allorché, appena diciassettenne, segue un corso di matematica tenuto presso l'Università di Jena da E. Weigel che, dieci anni più tardi, compendia parzialmente i contenuti di quel ciclo di lezioni nel saggio *Tetractys*. Leibniz

[1] Le unità campione per i pesi e le misure si basano sulla progressione geometrica di ragione 2 (per le misure di capacità essi usano i galloni, numerati 1, 2, 8 e 64 e le loro frazioni ¼, 1/8 e 1/32). Anche le monete sono 1, ½, ¼, 1/8 di sterlina per quelle in oro e argento e 1, ½ e ¼ per i penny.

[2] Leibniz GM VII, pp. 223-227.

[3] *Notae variae ad algebram, arithmeticam, geometriam seriesque pertinentes*, [A] pp. 882-883; *De progressione dyadica*, LH XXXV, 3B, 2 Bl. 1r-5v; *Machina arithmeticae dyadicae*, in von Mackensen 1966, pp. 256-259; *Summum calculi analytici fastigium*, in Zacher 1973, pp. 218-224; *Utrum numerus datus per alium datum sit divisibilis agnoscere ex additione characterum*, LH XXXV, 3B, 17, Bl. 5r/v; *Mira numerorum omnium expressio per 1 et 0*, in Zacher 1973, pp. 225-228; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; *Demonstratio quod columnae serierum exhibentium potestates ab arithmeticis aut numeros ex his conflatos sint periodicae*, GM VII, pp. 235-238; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; *De dyadicis*, GM VII, pp. 228-234.

[4] Cfr. Leibniz a Johann Bernoulli, 5.4.1701, GM III, pp. 656-657; Johann Bernoulli a Leibniz, 11.4.1701, GM III, pp. 658-660; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664; Johann Bernoulli a Leibniz, 7.5.1701, GM III, pp. 664-669; Leibniz a Johann Bernoulli, 30.10.1705, GM III, pp. 774-775; Leibniz a G. F. de l'Hôpital, 4.4.1701, GM I, pp. 338-339; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.11.1704, GM IV, pp. 92-95; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.2.1705, GM III, pp. 95-98; Leibniz a Jacob Bernoulli, 4.1705, GM IV, pp. 98-103; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; J. Hermann a Leibniz, 4.4.1705, GM IV, pp. 270-271; Leibniz a J. Hermann, 26.6.1705, GM IV, pp. 272-275; Leibniz a J. Hermann, 2.7.1705, GM IV, pp. 278-281; J. Hermann a Leibniz, 13.7.1705, GM IV, pp. 275-277; J. Hermann a Leibniz, 11.8.1705, GM IV, pp. 281-282; J. Hermann a Leibniz, 28.10.1705, GM IV, pp. 286-288; G. F. De l'Hôpital a Leibniz, 9.6.1701, GM I, pp. 339-341; Leibniz a G. F. De l'Hôpital 26.9.1701, GM I, pp. 341-343; Leibniz a G. Grandi, 11.1705, GM IV, pp. 214-215; E. W. Tschirnhaus a Leibniz, 27.5.1682, [A], pp. 651-663; Leibniz a E. W. Tschirnhaus, Giugno 1682, [A], pp. 620-633; P. Naudé a Leibniz, Dicembre 1700, in Zacher 1973, pp. 237-238; Leibniz a P. Naudé, 15.1.1701, in Zacher 1973, pp. 239-242; Leibniz a C. Schulenburg, 29.3.1698, GM VII, pp. 238-240; Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, pp. 240-243; Leibniz a B. de Fontanelle, 19.8.1706, in Zacher 1973, p. 356; P. Varignon a Leibniz, 6.12.1704, GM I, pp. 113-127; Leibniz a P. Varignon, 10.10.1706, GM I, pp. 150-151; Leibniz a B. de Bosses, 1709, GP II, pp. 380-384; D. Cluver a Leibniz, 16-26.7.1680, [A], pp. 237-240; Leibniz a D. Cluver, 31.8.1680, [A], pp. 262-264; Leibniz a Rudolf August, 8.5.1696, in Zacher 1973, p. 235; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, in Zacher 1973, pp. 243-249; J. Bouvet a Leibniz, 4.11.1701, in Zacher 1973, pp. 262-274; Leibniz a J. Bouvet, 2-3.4.1703, in Zacher 1973, pp. 275-286; Leibniz a C. M. Vota, 4.4.1703, in Zacher 1973, pp. 287-291; C. M. Vota a Leibniz, 17.4.1703, in Zacher 1973, pp. 302-303; Leibniz a J. Mignon, 7.4.1703, in Zacher 1973, p. 292; C. Caze a Leibniz, Maggio 1704, in Zacher 1973, pp. 305-306; Leibniz a C. Caze, 24.6.1704, in Zacher 1973, pp. 309-310; C. Caze a Leibniz, Luglio-Ottobre 1704, in Zacher 1973, pp. 311-338; C. Caze a Leibniz, 14.10.1704, in Zacher 1973, p. 339; Leibniz a C. Caze, 23.6.1705, in Zacher 1973, pp. 345-352; Leibniz a N. Witsen, 2.3.1704, in Zacher 1973, p. 304; N. Witsen a Leibniz, 6.6.1704, in Zacher 1973, pp. 307-308; W. E. Tentzel a Leibniz, Dicembre 1704, in Zacher 1973, p. 342; W. E. Tentzel a Leibniz, Dicembre 1704, in Zacher 1973, pp. 343-344; Leibniz a K. Sophie di Hannover; Aprile 1706, in Zacher 1973, pp. 353-355.

più volte dovrà ribadire la priorità delle sue scoperte sull'aritmetica binaria[5] nei confronti di questo lavoro, nel quale veniva proposto l'utilizzo di sistemi di numerazione diversi dal decimale, lodando in particolar modo quello in base quattro. La *Tetractys* non è, però, un'opera di particolare spessore e, anche se non è da escludere che Leibniz ne abbia tratto ispirazione, è certo che ne rielaborò e ampliò i contenuti in modo originale, criticando tra l'altro in più circostanze l'arbitrarietà della base di numerazione scelta dal suo insegnante. Se l'obiettivo è la semplificazione dei calcoli – argomenta Leibniz – occorre infatti scegliere una base più alta di 10, ad esempio 12 o 16; se invece si punta a una maggior chiarezza ed eleganza, è chiaro che un sistema di numerazione che sfrutta due sole cifre presenta maggiori vantaggi teorici e speculativi.[6]

Fra il 1672 e il 1676 Leibniz trascorre com'è noto un periodo di studi a Parigi, durante il quale perfeziona la sua cultura matematica e getta le basi del calcolo differenziale e integrale. Nella primavera del 1673, sotto lo stimolo di C. Huygens, intensifica gli studi scientifici e dedica particolare attenzione agli scritti di B. Pascal sul triangolo aritmetico[7]. Proprio a quest'epoca risale il suo primo accenno esplicito alla diadica nel manoscritto *Notae variae ad algebram, arithmeticam, geometriam seriesque pertinentes*[8], datato ottobre 1674, nel quale si trovano due esempi correttamente svolti di addizione e di moltiplicazione e altri due, lasciati incompiuti, di sottrazione e di divisione, eseguiti su numeri scritti in codice binario. Nello stesso lasso di tempo Leibniz si occupa anche della costruzione della sua celebre macchina calcolatrice decimale a quattro-specie, di cui presenta un modello in legno alla Royal Society nel febbraio del 1673, durante il primo dei due viaggi che compie a Londra.

I più antichi documenti leibniziani di una certa consistenza riguardanti l'aritmetica binaria risalgono al periodo immediatamente successivo al suo ritorno in patria ad Hannover nel 1676. Si tratta di due manoscritti ampi, seppure a tratti disorganici, da cui già trapela con chiarezza la fonte di ispirazione e il fine che orienteranno Leibniz in questa fase iniziale della sua ricerca, facendo emergere alcuni basilari risultati nel settore della diadica.[9]

Il primo manoscritto, intitolato *De progressione dyadica*, reca la data 15 marzo 1679 ed è citato, a partire da L. Couturat, agli inizi del Novecento, e in tutta la bibliografia più recente, come il più antico documento leibniziano su questo tema[10]. Questo breve saggio – che consta di due parti, la prima delle quali è parzialmente tradotta in italiano, a cura di Lia Ruffino nel 1971, manca ancora di un'edizione critica e risulta, talora, di lettura assai difficile, non solo per le numerose cancellature, ma anche per lo stile conciso e quasi frammentario che lo caratterizza.[11] Accanto alle regole per eseguire le quattro operazioni fondamentali compaiono qui alcuni accenni sia alle caratteristiche di regolarità che presenta la progressione dei numeri naturali in sistema binario, sia all'utilità di questo sistema per indagare certe proprietà aritmetiche, come la divisibilità. Il *Summum calculi analytici fastigium*[12] risale invece al dicembre del 1679 e in esso si prospettano le possibili ricadute della diadica nella teoria dei numeri, nell'algebra e nell'analisi trascendente, un tema su cui Leibniz ritornerà più volte nel corso degli anni, ma senza successo, nella speranza di individuare quali proprietà si conservano e quali si perdono, al variare della base scelta per il sistema di numerazione. Fra il 1679 e il 1696 si assiste ad un lungo periodo di silenzio, interrotto da pochi ellittici riferimenti sull'utilità della numerazione binaria per lo studio delle quantità trascendenti, nella corrispondenza con E. W. Tschirnhaus.[13] Tale interruzione si giustifica forse con le difficoltà incontrate a presentare sistemi di numerazione diversi da quello decimale, che garantissero utili e interessanti applicazioni teoriche e pratiche.

A partire dal 1696, tuttavia, il filosofo e matematico tedesco riprende gli studi giovanili, in un'ottica lievemente differente, di carattere più filosofico e teologico, sollecitato dalla scoperta, fatta congiuntamente a J. Bouvet (1656-1730), del legame che intercorre fra il sistema binario e gli esagrammi cinesi dell'*I Ching*, cui abbiamo accennato sopra. I contatti epistolari con i missionari gesuiti in Cina e l'incontro avvenuto a Roma nel 1689 con padre Filippo Grimaldi (1638-1712) hanno infatti destato la sua l'attenzione sul celebre antichissimo testo sapienziale cinese.[14]

Il 1701 segna una tappa saliente negli studi di Leibniz sull'aritmetica binaria. A questa data egli possiede ormai gli algoritmi delle 4 operazioni e, grazie alla collaborazione con il matematico francese P. Naudet, riesce a determinare quelle leggi di periodicità nelle varie successioni dei numeri naturali, dei loro multipli e delle potenze in codice binario, che da tempo aveva intuito, pur senza riuscire a formalizzarle con precisione.

[5] Cfr. Leibniz a Johann Bernoulli, 5.4.1701, GM III, p. 657; Johann Bernoulli a Leibniz, 11.4.1701, GM III, p. 659; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, p. 661; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.2.1705, GM III, p. 96. Leibniz scrive ad esempio a Johann Bernoulli (29.4.1701, GM III, p. 661): "Molitus hoc sum ante multos annos, etiam antequam quicquam constaret de *Tetracty* illa nuper resuscitata." ("Mi sono occupato di questo già da molti anni, prima ancora che si sapesse qualunque cosa della *Tetractys* sopra citata.") Per i giudizi sulla *Tetractys*, cfr. Couturat 1901, p. 295.

[6] Cfr. Leibniz, *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, p. 225: "... et si on étoit accoutumé à aller par douze ou par seize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est-à-dire par 0 et 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géometrie, dont la raison est que les nombres étant réduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paroit partout un ordre merveilleux."

[7] Stimolato da Huygens a trovare la somma dei reciproci dei numeri triangolari, Leibniz indaga sulle proprietà del triangolo aritmetico e dei numeri figurati ed elabora il suo triangolo armonico. Ritrova con un suo metodo particolare la somma dei primi n–1 quadrati e studiando i "misteriosi" legami fra le somme e le differenze delle successioni giunge a ipotizzare un calcolo delle somme e delle differenze anche in ambito geometrico, che costituirà il fondamento del suo calcolo differenziale e integrale.

[8] Leibniz, *Notae variae ad algebram, arithmeticam, geometriam seriesque pertinentes*, [A] pp. 882-883. Cfr. anche Leibniz e J. Ferguson, [A], pp. 129-139: si trova qui un esempio di addizione non correttamente eseguita, il quale ci consente di affermare che, a questa data, Leibniz non aveva ancora piena dimestichezza nel condurre calcoli, seppure elementari, su numeri scritti in notazione binaria. Su questi primi accenni di Leibniz alla diadica si veda J. Hoffmann 1974, p. 146.

[9] Il contenuto di questi manoscritti avvalora la nostra ipotesi secondo cui la genesi degli studi leibniziani sulla diadica risale agli anni trascorsi a Parigi, anche se la precedente storiografia indicava il 1701 come la data in cui Leibniz sarebbe giunto ad elaborare i suoi primi risultati originali nel campo della diadica.

[10] Zacher 1973, pp. 219-224. Cfr. L. Couturat 1903, p. 574. La datazione di questo manoscritto e del *Summum calculi analytici fastigium* concorda con un riferimento interno alla lettera di Leibniz a C. Schulenburg del 17.5.1698, GM VII, p. 239, dove il mittente dichiara di essersi occupato dell'aritmetica binaria "da più di vent'anni".

[11] Cfr. L. Ruffino in AAVV 1971, pp. 59-64.

[12] Zacher 1973, pp. 218-220. Questo manoscritto non è invece citato in Couturat 1901 e 1903.

[13] Cfr. ad esempio Leibniz a E. W. Tschirnhaus, giugno 1682, GM IV, p. 492: "Die progressio Bimalis würde sonderlich ad espressiones quantitatum in numeris nüzlich seyn, denn es prima und simplicissima, und zweifle nicht daß sich darinne viel harmoniae finden würden, so in andern progressionen nicht also zu spühren.". Nel 1683 Leibniz abbozza anche una possibile applicazione della diadica al problema della determinazione dei numeri primi, come si evince dal manoscritto *Utrum numerus datus per alium datum sit divisibilis agnoscere ex additione characterum*, LH XXXV, 3B, 17 Bl. 5r/v.

[14] Cfr. Von Collani 1989, pp. 89-103 e Robinet 1989, pp. 79-88.

Contemporaneamente si infittisce la sua corrispondenza sulla diadica con Johann Bernoulli[15] e con i missionari francesi della Compagnia di Gesù in Cina, in particolar modo quella con il padre Joachim Bouvet.[16] Nel febbraio del 1701 Leibniz è ormai pronto a sintetizzare i risultati ottenuti in un breve saggio che invia all'Accademia Reale delle Scienze di Parigi per sancire la sua ammissione a socio corrispondente. L'*Essay d'une nouvelle science des nombres* [17] non è, tuttavia, nelle sue intenzioni, uno scritto definitivo sull'aritmetica binaria: esso funge piuttosto da traccia per stimolare giovani matematici a proseguire in questo genere di ricerche e serve da monito affinché tali idee non vadano perdute. La memoria, letta nella seduta del 23 aprile 1701, non verrà però pubblicata, per l'esplicita richiesta di Leibniz al segretario dell'Accademia, B. Fontenelle. Nell'autunno seguente, il filosofo e matematico tedesco approfondisce, generalizzandoli, i contenuti di quel saggio in un nuovo testo, senza dubbio uno dei più tecnici e complessi sull'aritmetica diadica: la *Demonstratio quod columnae serierum exhibentium potestates ab arithmeticis aut numeros ex his conflatos sint periodicae*, che verrà pubblicata nel 1701 all'Accademia delle scienze di Berlino.[18] Su quest'importante scritto, nel quale l'autore si spinge ad indagare la natura dei periodi di una generica progressione aritmetica in notazione binaria, ci soffermeremo nel paragrafo 3, dedicato ai risultati matematici ottenuti da Leibniz in quest'ambito.

A due anni di distanza, nel 1703, egli tornerà ad occuparsi del sistema di numerazione in base 2 nella nuova memoria *L'esplication de l'aritmétique binaire...*, presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi, destinata a divenire il suo scritto più noto sulla diadica, essendo fra i pochi testi comparsi già nella prima edizione della sua *Opera omnia* (1768), a cura di L. Dutens.[19] Si tratta di un articolo sostanzioso, ma dal taglio spiccatamente divulgativo e didattico, in cui vengono sviluppate le nozioni basilari dell'aritmetica binaria – ad esempio mostrando come si eseguono le quattro operazioni – a fianco di risultati più tecnici, relativi ai periodi che si riscontrano in varie successioni numeriche. Si accenna qui anche alle applicazioni di tale teoria all'analisi, ai pesi e alle monete e viene dato ampio spazio alla scoperta del significato dei 64 esagrammi, pur rimanendo lontani dalla profondità speculativa dei manoscritti e degli articoli del 1701. Questa è la conseguenza di una precisa scelta dell'autore che ha preferito selezionare gli aspetti matematicamente meno pregnanti, ma più curiosi e avvincenti, da indirizzare al pubblico accademico colto, non solo costituito da matematici specialisti.

A partire dal 1705 si assiste al graduale declino fino alla cessazione completa delle riflessioni di Leibniz nel campo della diadica. Egli ne discute ancora in varie epistole, senza produrre sostanzialmente nuovi risultati. La corrispondenza con Jacob Bernoulli e

[15] Cfr. Leibniz a Johann Bernoulli, 5.4.1701, GM III, pp. 656-657; Johann Bernoulli a Leibniz, 11.4.1701, GM III, pp. 658-660; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664.

[16] Cfr. Von Collani 1992, pp. 88-103 che cita le seguenti lettere: J. Bouvet a Leibniz, 18.10.1697; Leibniz a J. Bouvet, 2.12.1697, p. 64; J. Bouvet a Leibniz, 28.2.1698; J. Bouvet a Le Gobien e Leibniz, 8.11.1700; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, pp. 138-139; J. Bouvet a Leibniz, 4.11.1701, p. 154.

[17] Zacher 1973, pp. 250-261. Leibniz annuncia di aver inviato la memoria al marchese G. F. de l'Hôpital nella lettera del 4.4.1701, GM I, p. 339 e la presenta al segretario dell'Accademia B. de Fontenelle: il carteggio relativo è pubblicato in Costabel 1966, pp. 115-132.

[18] Leibniz GM, VII, pp. 235-243.

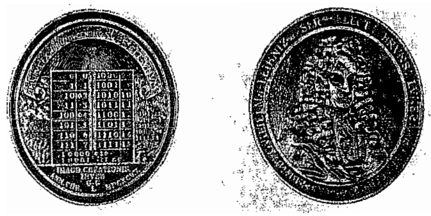
[19] Nell'edizione dell'*Opera Omnia* di Leibniz, a cura di L. Dutens (1768), compaiono i seguenti testi sull'aritmetica diadica (Tomo III, pp. 346-354; 390-394; 515-517; Tomo IV, pp. 208-210): *De inventione arithmeticae dyadicae a G. G. Leibnitio Excerpta ex vita Leibnitii a D. Jaucourt scripta*; Leibniz a C. Schulenburg, 29.3.1698; Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698; *Esplication de l'arithmétique binaire* e Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704.

con J. Hermann[20], che si snoda fra l'estate e l'autunno del 1705, segna la tappa finale delle sue ricerche, con i reiterati tentativi di stimolare i due corrispondenti ad ampliare le indagini in questo settore. Pur mostrandosi Hermann incuriosito dalle mirabili "armonie" della progressione binaria, egli tuttavia preferirà dedicarsi ad altri temi di matematica leibniziana, connessi all'analisi differenziale. L'interesse di Leibniz per la diadica non si spegnerà tuttavia mai del tutto, come si evince da alcuni fuggevoli accenni nella sua corrispondenza con P. V. de Bosses del 1709 e nella lunga lettera sulla filosofia cinese indirizzata a N. De Remond nel 1716.[21]

2. I risvolti teologici della numerazione binaria

Gli studi leibniziani sulla diadica presentano numerose sfaccettature, il loro carattere è poliedrico e spazia da considerazioni di tipo matematico a riflessioni di carattere storico, filosofico e persino teologico.

Particolarmente pregna di riferimenti all'utilità della diadica per favorire il diffondersi della fede in Cina è, ad esempio, la corrispondenza che, alla fine del Seicento, Leibniz intrattiene con C. Schulenburg e con il duca Rudolph August di Braunschweig.[22] Egli ribadisce ripetutamente che l'aritmetica binaria è "emblema" o "magnifica similitudine" della Creazione, dal momento che, come tutte le cose sono create dal nulla, grazie all'onnipotenza divina, così nel sistema di numerazione a base 2 tutti i numeri si ottengono dalle sole cifre 0 e 1. Per questo, nell'inverno del 1696, Leibniz suggerisce al Duca di Hannover di far realizzare una medaglia per l'inizio del nuovo anno, recante la dicitura: "Imago Creationis. Omnibus Ex Nihilo Ducendis Sufficit Unum"[23], affiancata dall'elenco dei primi diciassette numeri naturali, in notazione binaria e da due esempi molto semplici di operazioni nel nuovo sistema. un'addizione e una moltiplicazione. Il Duca si mostra entusiasta del progetto e la medaglia sarà effettivamente coniata poco dopo dal numismatico di corte U. Müller.[24]



[20] Cfr. Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.11.1704, GM IV, pp. 92-95; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.2.1705, GM III, pp. 95-98; Leibniz a Jacob Bernoulli, 4.1705, GM IV, pp. 98-103; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; J. Hermann a Leibniz, 4.4.1705, GM IV, pp. 270-271; Leibniz a J. Hermann, 26.6.1705, GM IV, pp. 272-275; Leibniz a J. Hermann, 2.7.1705, GM IV, pp. 278-281; J. Hermann a Leibniz, 13.7.1705, GM IV, pp. 275-277; J. Hermann a Leibniz, 11.8.1705, GM IV, pp. 281-282; J. Hermann a Leibniz, 28.10.1705, GM IV, pp. 286-288.

[21] Cfr. Leibniz a B. de Bosses, 1709, GP II, pp. 380-384 e Leibniz a N. de Remond, GP III, p. 670.

[22] Cfr. Leibniz a Rudolf August von Braunschweig, 8.5.1896, in Zacher 1973, p. 235 e Leibniz a Rudolf August von Braunschweig, 2.1.1897, Dutens 1768, III, p. 346. Cfr. anche Leibniz a C. Schulenburg, 29.3.1698, GM VII, pp. 349-354; *De organo, sive Arte magna cogitandi*, Barone 1968, p. 204 e *Mira numerorum omnium expressio per 1 et 0*, in Zacher 1973, pp. 225-228. Una ricostruzione dettagliata degli studi leibniziani sulla diadica negli anni 1696-97 si trova in Cajori 1916, pp. 557-565.

[23] "Immagine della Creazione. È sufficiente l'unità per produrre dal nulla tutte le cose."

[24] Cfr. Zacher 1973, p. 236.

3. I risultati matematici di Leibniz

Per quanto riguarda il versante prettamente matematico, il primo punto su cui Leibnız si sofferma riguarda l'introduzione dell'algoritmo nella diadica, cioè lo studio delle modalità con cui si eseguono le quattro operazioni fondamentali sui numeri scritti in base 2.[25] Fra le caratteristiche peculiari delle operazioni in sistema binario, il matematico tedesco sottolinea come non sia più necessario l'apprendimento mnemonico della tavola pitagorica, dal momento che è sufficiente sapere che $1\times1 = 1$ e $1\times0 = 0\times1 = 0\times0 = 0$. La moltiplicazione degenera nell'addizione, mentre la divisione è ricondotta alla sottrazione e si esegue "sans tastonner", poiché il quoziente non può che prevedere le cifre 0 e 1. L'esecuzione delle operazioni si rivela allora più intuitiva e a questo proposito Hermann gli comunica la sua intenzione di proporla agli studenti più giovani, prima ancora di farli familiarızzare con la pratica decimale.[26]

Esempi di operazioni correttamente eseguite su numeri scritti in notazione binaria si trovano già nel manoscritto *Notae variae*...del 1674 – come abbiamo avuto modo di accennare – ma occorre attendere il 1696 per trovare nel lavoro *Mira numerorum omnium expressio per 1 et 0* la prima trattazione sistematica – poi ripresa nel *De dyadicis* (1705) – delle cosiddette "quattro prassi", con l'indicazione delle rispettive regole "assiomatiche" per eseguirle. Nell'aprile del 1701, inserendo all'interno dell'*Essay d'une nouvelle science des nombres* un esempio di addizione che coinvolge 12 addendi, egli dimostra di essere ormai in grado di manipolare i numeri binari con assoluta padronanza, conducendo calcoli assai laboriosi. Per eseguire l'addizione 1+3+4+9+11+7+15+30+47+27+39+51=244 Leibniz procede per successivi riporti: nella prima colonna a destra la somma delle unità dà come risultato 10 = (in base 2) 1010, per cui scrive 0 e riporta 1 nella seconda e nella quarta colonna (da noi indicati in neretto); passa poi ad esaminare la seconda colonna ripetendo il medesimo procedimento (i riporti sono ora evidenziati in grigio) e così via fino ad esaurimento delle colonne e dei riporti. Lo schema inserito è il seguente:

11+
1 111
1100
1001
1011
1111
11111
11110
101111
111011
1100111
1110011=
11110100

[25] Cfr. *Notae variae ad algebram, arithmeticam, geometriam seriesque pertinentes*, [A] pp. 882-883; *Mira numerorum omnium expressio per 0 et 1*, in Zacher 1973, pp. 225-228; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, in Zacher 1973, pp. 243-249; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Leibniz a C. M. Vota, 4.4.1703, in Zacher 1973, pp. 287-291; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; *De dyadicis*, GM VII, pp. 228-234; Leibniz a J. Hermann, 2.7.1705, GM IV, pp. 278-281; J. Hermann a Leibnız, 13.7.1705, GM IV, pp. 275-277; Leibniz a K. Sophie di Hannover, Aprile 1706, in Zacher 1973, pp. 353-355.

[26] Cfr. J. Hermann a Leibniz, 13.7.1705, GM IV, p. 276.

Successivamente l'attenzione di Leibniz si appunta su quelle che egli non esita a definire le "mirabili proprietà della diadica":[27] in primo luogo, riprendendo le considerazioni avanzate da Pacioli e da Bachet, osserva che ogni numero naturale può essere scritto come somma di opportune potenze di due, prese una sola volta e con la convenzione che $2^0 = 1$ e che tale proprietà si può applicare utilmente nel campo dei pesi e delle monete[28], dal momento che ogni peso inferiore ad una certa soglia si otterrà con il minimo numero di pesi campione additivi, fra loro in progressione geometrica di ragione 2. Inoltre, nel sistema binario, ogni potenza di due è esprimibile con l'unità seguita da un numero di zeri, pari all'esponente (ad esempio $2^2 = 100$). Si tratta di proprietà che non sono di esclusiva pertinenza di questo sistema di numerazione, eppure Leibniz vi trae spunto per sottolineare le "armonie meravigliose"[29] che l'uso della diadica consente di rilevare[30], asserendo che:

"ubicunque principia sunt ordinata, omnia etiam derivata ordinate progredi."[31]

L'obiettivo primario che il matematico tedesco si prefigge nei suoi studi di aritmetica binaria può essere tuttavia considerato l'analisi delle periodicità nelle tavole numeriche.[32] A partire dal 1696 e fino al 1705, infatti, Leibniz individua in questo problema l'autentico

[27] *Mira numerorum omnium expressio per 0 et 1*, in Zacher 1973, pp. 225-228; Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, pp. 240-243; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, in Zacher 1973, pp. 243-249; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Johann Bernoulli a Leibniz, 7.5.1701, GM III, pp. 664-669; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; *De dyadicis*, GM VII, pp. 228-234;Leibniz a K. Sophie di Hannover, Aprile 1706, in Zacher 1973, pp. 353-355.

[28] Cfr. ad esempio Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, p. 242: "Obiter adjiciam, ex hac expressione sine ulla demonstratione sequi, cur nummi et pondera progressionis Geometricae duplae apta sint, ut paucissimis datis caetera possint componi." (Inoltre aggiungerò che da questa espressione discende, senza alcuna dimostrazione, perché monete e pesi sono dipendenti dalla progressione geometrica doppia, in modo che, con pochissimi pesi dati, possano essere composti tutti gli altri); *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 252-253: "C'est ce qui a porté les essayeurs de monnoye à se servir des poids en progression double: car ainsi peu de poids suffisent pour beaucoup de pesanteurs. Si le monnoyes mêmes estoient reglées de cette maniere, le moins de pieces suffiroit pour le plus de valeurs, et comme les petites pieces sont les moins justes, par leur propre constitution, on en auroit le moins de besoin."

[29] Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, in Zacher 1973, p. 244.

[30] *Marii Nizolii de veris principiis et vera ratione philosophandi*, GP IV, pp. 127-177; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; Leibniz a Jacob Bernoulli, marzo 1705, GM IV, pp. 98-103; Leibniz a J. Hermann, 2.7.1705, GM IV, pp. 278-281; Leibniz a C. Caze, 23.6.1705, in Zacher 1973, pp. 345-352; J. Hermann a Leibniz, 11.8.1705, GM IV, pp. 281-282.

[31] Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, p. 240.

[32] *Mira numerorum omnium expressio per 0 et 1*, in Zacher 1973, pp. 225-228; Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, pp. 240-243; P. Naudé a Leibniz, Dicembre 1700, in Zacher 1973, pp. 237-238; Leibniz a P. Naudé, 15.1.1701, in Zacher 1973, pp. 239-242; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701, in Zacher 1973, pp. 243-249; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Leibniz a G. F. de l'Hôpital, 4.4.1701, GM I, pp. 338-339; Leibniz a Johann Bernoulli, 5.4.1701, GM III, pp. 656-657; Johann Bernoulli a Leibniz, 11.4.1701, GM III, pp. 658-660; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664; Johann Bernoulli a Leibniz, 7.5.1701, GM III, pp. 664-669; Leibniz a G. F. de l'Hôpital, 26.9.1701, GM I, pp. 341-343; Leibniz a J. Bouvet, 2-3.4.1703, in Zacher 1973, pp. 275-286; Leibniz a C. M. Vota, 4.4.1703, in Zacher 1973, pp. 287-291; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; Leibniz a C. Caze, 24.6.1704, in Zacher 1973, pp. 309-310; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.11.1704, GM IV, pp. 92-95; Jacob Bernoulli a Leibniz, 28.2.1705, GM III, pp. 95-98; Leibniz a Jacob Bernoulli, marzo 1705, GM IV, pp. 98-103; Leibniz a C. Caze, 23.6.1705, in Zacher 1973, pp. 345-352; Leibniz a G. Grandi, Novembre 1705, GM IV, pp. 214-215; Leibniz a K. Sophie di Hannover, Aprile 1706, in Zacher 1973, pp. 353-355; Leibniz a J. Hermann, 26.6.1705, GM IV, pp. 272-275; Leibniz a Johann Bernoulli, 30.10.1705, GM III, pp. 774-775.

fulcro dello sviluppo di tale teoria e il motore propulsore per ricerche consimili da condursi – in un secondo momento – su altre aritmetiche differenti dalla decimale. La ricerca dei periodi nelle progressioni binarie viene proposta a numerosi collaboratori, fra cui Philippe Naudé (1700),[33] Johann Bernoulli (1701), Jacob Bernoulli (1705), Jacob Hermann (1705) e Guillâume François de l'Hôpital (1701),[34] nessuno dei quali, tuttavia, fornirà spunti originali per proseguire tali indagini. Leibniz inizia a soffermarsi sulle successioni dei numeri naturali, dei loro multipli – e in particolare dei numeri chiamati ternari, quinari, settenari ecc., cioè dei multipli di 3, 5, 7, ecc., dei numeri quadrati e dei cubi e, già nel 1701, è in grado di fornire l'indicazione delle periodicità in esse riscontrate.[35] Per le potenze di grado superiore a tre, le espressioni polinomiali, i numeri triangolari, piramidali e figurati in genere, egli evidenzia come la diadica consenta di trovare, "senza induzione e con il ricorso al puro ragionamento"[36], analoghe proprietà di periodicità. In queste successioni gli intervalli, dopo cui si ripetono le stesse cifre, non sono più lunghi rispetto a quelli che si riscontrano nei numeri naturali e, in virtù di ciò, si possono scrivere le rispettive tavole, proseguendole all'infinito, senza dover eseguire calcoli lunghi e farraginosi.[37] Il matematico tedesco non fornisce, tuttavia, l'esatta codifica di tutti i periodi e, dopo il 1705, sembra abbandonarne lo studio, forse influenzato dalla sfiducia espressa da alcuni suoi corrispondenti, *in primis* da Jacob Bernoulli.

Delle successioni citate Leibniz fornisce le tavole, ottenute disponendo i numeri che le compongono in codice binario uno sotto l'altro e aggiungendo degli zeri nei posti vacanti (v. Tav. 1). Tali zeri sono sì superflui, ma servono a far risaltare meglio i periodi nelle varie colonne. Leibniz conia un simbolismo apposito per rappresentare in modo chiaro e conciso i periodi che ricorrono nelle colonne della successione dei naturali, dal momento che questi diventano via via più lunghi. Ad esempio, per indicare il periodo della terza colonna a partire da destra utilizza la notazione $0.2^2.1.2^2$, essendo il periodo costituito da uno 0 che si ripete 2 volte, seguito da un'unità che si ripete altrettante volte.

[33] Il matematico francese si dedicò a stilare le tavole in notazione binaria dei naturali, dei multipli e delle prime potenze, di cui Leibniz si avvalse, con tutta probabilità, per la determinazione dei periodi.
[34] G. F. de l'Hôpital raccomandò a Leibniz un giovane matematico, Parent, disposto a collaborare negli studi sulla determinazione dei periodi. Leibniz spesso lamenta di non avere l'aiuto di giovani matematici di talento per rintracciare i periodi "che ancora gli scappano".
[35] *Mira numerorum omnium expressio per 0 et 1,* in Zacher 1973, pp. 225-228; Leibniz a C. Schulenburg, 17.5.1698, GM VII, pp. 240-243; P. Naudé a Leibniz, Dicembre 1700, in Zacher 1973, pp. 237-238; Leibniz a P. Naudé, 15.1.1701, in Zacher 1973, pp. 239-242; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701 in Zacher 1973, pp. 243-249; Leibniz a J. Bouvet, 2-3.4.1703, in Zacher 1973, pp. 275-286; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Leibniz a G. F. de l'Hôpital, 4.4.1701, GM I, pp. 338-339; Leibniz a G. F. de l'Hôpital, 26.9.1701, GM I, pp. 341-343; Leibniz a Johann Bernoulli, 5.4.1701, GM III, pp. 656-657; Johann Bernoulli a Leibniz, 11.4.1701, GM III, pp. 658-660; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664; Johann Bernoulli a Leibniz, 7.5.1701, GM III, pp. 664-669; Leibniz a C. M. Vota, 4.4.1703, in Zacher 1973, pp. 287-291; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; Leibniz a J. Hermann, 24.11.1704, GM IV, pp. 263-266; Leibniz a J. Hermann, 26.6.1705, GM IV, pp. 272-275; Leibniz a Jacob Bernoulli, 28.11.1704, GM IV, pp. 92-95; Jacob Bernoulli a Leibniz, 28.2.1705, GM III, pp. 95-98; Leibniz a Jacob Bernoulli, marzo 1705, GM IV, pp. 98-103; Leibniz a G. Grandi, Novembre 1705, GM IV, pp. 214-215; Leibniz a K. Sophie di Hannover, Aprile 1706, in Zacher 1973, pp. 353-355; Leibniz a C. Caze, 24.6.1704, in Zacher 1973, pp. 309-310; Leibniz a C. Caze, 23.6.1705, in Zacher 1973, pp. 345-352; Leibniz a Johann Bernoulli, 30.10.1705, GM III, pp. 774-775.
[36] Leibniz, *Essay d'une nouvelle science des nombres*, 1701, in Zacher 1973, p. 256.
[37] *Mira numerorum omnium expressio per 0 et 1,* in Zacher 1973, pp. 225-228; Leibniz a J. Bouvet, 15.2.1701 in Zacher 1973, pp. 243-249; *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 250-261; Leibniz a Johann Bernoulli, 29.4.1701, GM III, pp. 660-664; Leibniz a C. M. Vota, 4.4.1703, in Zacher 1973, pp. 287-291; *Esplication de l'arithmétique binaire*, GM VII, pp. 223-227; Leibniz a J. Bouvet, 2-3.4.1703, in Zacher 1973, pp. 275-286; Leibniz a C. Caze, 24.6.1704, in Zacher 1973, pp. 309-310.

[Ta]v. 1

Naturali	Ternari	Quinari	Settenari	Quadrati	Cubi	Triangolari
:. dcba						
000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
000001	000011	0000101	000111	000001	000001	000001
000010	000110	0001010	001110	000100	001000	000011
000011	001001	0001111	010101	001001	011011	000110
000100	001100	0010100	011100	010000	1000000	001010
000101	001111	0011001	100011	011001	1111101	001111
000110	010010	0011110	101010	100100	11011000	010101
000111	010101	0100011	110001	110001	101010111	011100
001000	011000	0101000	111000	1000000	1000000000	100100
001001	011011	0101101	111111	1010001	1011011001	101101
001010	011110	0110010	1000110	1100100	1111101000	110111
001011	100001	0110111	1001101	1111001	10100110011	1000010
001100	100100	0111100	1010100	10010000		1001110
001101	100111	1000001	1011011	10101001		1011011
001110	101010	1000110	1100010	11000100		1101001
001111	101101	1001011	1101001	11100001		1111000
Periodi	Periodi	Periodi	Periodi	Periodi	Periodi	Periodi
01	01	01	01	01	01	1100
0011	0110	0011	0110	0010	0001	11110000
$0.2^2.1.2^2$	00101101	01011010	01111000	00010100	00000101	
$0.2^3.1.2^3$	00011 0011100011	0011011011001001	0010101011010101	0000110101011000		

Il matematico tedesco si propone quindi di elaborare un metodo per individuare questi periodi senza bisogno di ricavarli direttamente con il calcolo. Per quanto concerne quelli dei numeri naturali, dei numeri pari e di quelli dispari, non viene esplicitato l'algoritmo per la loro determinazione, essendo immediata la codifica. Leibniz esemplifica invece con una dimostrazione rigorosa il metodo che, sulla base della conoscenza dei periodi dei naturali, consente di individuare quelli della successione dei "numeri ternari", cioè dei multipli di 3, e dei quadrati dei naturali.[38]

Volendo codificare questi ultimi[39], egli considera un generico numero in notazione binaria, scritto con le lettere *gfedcba* – dove si deve tener presente che *a*, *b*, *c*, *d*, ... indicano sia le colonne della successione dei naturali, sia i rispettivi periodi in esse ricorrenti. Tale numero è moltiplicato per se stesso, così da ottenenerne il quadrato e la moltiplicazione è eseguita con lo schema di retaggio medioevale, detto "a calice" o "alla francese". Nella prima riga si trovano i risultati di tutti i prodotti per il fattore *a*, nella seconda riga i risultati dei prodotti per il fattore *b*, e così via.[40] Si ottiene pertanto:

k h g f e d c b a
k h g f e d c b a

---

ka ha ga fa ea da ca ba aa
bk bh bg bf be bd bc bb ba
ck ch cg cf ce cd cc cb ca
dk dh dg df de dd dc db da
ek eh eg ef ee ed ec eb ea
....

2ha 2ga 2fa 2ea 2da 2ca 2ba aa
2bg 2bf 2be 2bd 2cb bb
2cf 2ce 2cd cc
2ed dd
....

---

ka ha ga fa ea da ca ba ▪ *a*
hb gb fb eb db cb b
gc fc ec dc c
fd ed d
e

L'idea alla base della dimostrazione consiste nell'eseguire sui periodi dei numeri naturali le operazioni di somma e di prodotto indicate; i riporti che via via si ottengono saranno "tenuti da parte" e conteggiati al passo successivo, cioè allorché si va a calcolare il periodo della colonna immediatamente alla sinistra di quella su cui si sta operando. Ad esempio: essendo $a = 0101\ldots$ è chiaro che $aa = 0101\ldots$, cioè $aa = a$ e quindi il periodo della prima colonna della successione dei quadrati coincide con il periodo della prima colonna della successione dei numeri naturali ed è 01.

---

[38] Leibniz a P. Naudé, 15.1.1701, in Zacher 1973, pp. 240-241 e *Essay d'une nouvelle science des nombres*, in Zacher 1973, pp. 257-260.
[39] Abbiamo ricostruito la dimostrazione fornita da Leibniz, svolgendo i calcoli qui solo accennati (v. Tav. 2).
[40] Per la proprietà commutativa si ha $ab = ba$, $ac = ca$ ecc. allora si scrive $2ab$, $2ac$ ecc., nella prima riga e analogamente per tutti gli altri, ottenendo i doppi prodotti.

a	*b*	*c*	*d*	*aa*	*ba*	*2ba*	*bb*	*2ca*	*2ca+bb*	*2cb*	*2da*	*2da+2cb*	*2ea*	*2bd*	*cc*	*2bd+2ea+cc*	*ba+b*	*da+cb+c*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	10	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	10	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	10	10	0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	10	0	10	0	0	1	1	1	10
1	1	1	0	1	1	10	1	10	11	10	0	10	0	0	1	1	10	10
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	10	10	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	10	0	10	1	0
1	1	0	1	1	1	10	1	0	1	0	10	10	0	10	0	10	10	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	10	10	0	10	10	0	0	1	1	0	10
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	10	0	10	0	10	1	11	1	10
1	1	1	1	1	1	10	1	10	11	10	10	100	0	10	1	11	10	11

Tav. 2

0	0	0
0	0	0
1	1	1
0	0	0
1	1	1
0	0	0
1	1	1
0	0	0
1	1	1

Essendo poi a = 01010101, b = 00001111, si avrà ab = 00000101. Moltiplicando tale prodotto per due si ottiene una colonna costituita da soli zeri, il cui periodo è – ovviamente – 0, e una colonna di riporto che andrà sommata alla colonna successiva $2ca+bb$. Eseguendo la somma $2ca+bb$ e aggiungendo la colonna di riporto si ricava una colonna che coincide esattamente con $ba+b$.

Per risalire al periodo della terza colonna, Leibniz calcola allora la somma di ba e b ottenendo:

ba	0001
b	0011
periodo	0010
1° riporto	0001

Sommando il riporto precedentemente determinato al periodo di ca si avrà il periodo della quarta colonna:

ca	00000101
1° riporto	00010001
periodo	00010100
2° riporto	00000001

e analogamente si procede per le successive (Tav. 2).

Emerge allora con chiarezza il percorso concettuale seguito da Leibniz per giungere alla deduzione del suo algoritmo. I periodi delle varie successioni numeriche – di multipli o di potenze di numeri naturali – sono strettamente connessi ai periodi dei numeri naturali stessi, che egli padroneggia a pieno fin dal 1679. Del resto Leibniz sa eseguire operazioni di somma e di prodotto sui singoli numeri in notazione binaria: non resta allora che fondere queste due conoscenze precedentemente acquisite, osservando che i periodi delle varie successioni numeriche sono "combinazioni lineari" dei periodi dei naturali. Eseguendo pertanto opportune operazioni di somma e di prodotto su questi ultimi, si possono ricavare i periodi per le successioni dei numeri pari, dei ternari, dei quadrati, dei cubi, ecc. (Tav. 1)

Un tassello determinante nella ricostruzione di questa dimostrazione è fornito dalla lettera che Leibniz scrive a J. Hermann il 26 giugno 1705, in cui mostra come eseguire le operazioni di addizione e di sottrazione sui periodi dei naturali, calcolando il prodotto dei periodi di due generiche colonne di tale progressione.[41]

Indicando, infatti, i termini della prima colonna dei numeri naturali con 10, quelli della seconda con 11, quelli della terza con 12 e così via, il periodo della colonna (n-1)-esima sarà $0.2^n\ 1.2^n$, cioè è costituito da 2^n zeri e da altrettante unità. Calcolando i prodotti delle colonne $10.1n$, ottenuti moltiplicando i termini corrispondenti sulla stessa riga, si ricava una colonna che ha come periodo $0.2^n\ (01)\ 2^{n-1}$, mentre calcolando $11.1n$ si ottiene come periodo $0.2^n\ (0.2.1.2)\ 2^{n-2}$ e, in generale, il prodotto delle colonne $1m.1n$ avrà come periodo $0.2^n(0.2^m\ .1.2^m\ )\ 2^{n-m-1}$.

Resta ancora in sospeso, nel disegno vagheggiato da Leibniz, la questione dei periodi in successioni numeriche più generali, come quelle dei numeri figurati. Si trattava, infatti, di progressioni, a lui ben note fin dal periodo parigino, e proprio agli studi di quegli anni si

[41] La lettera che compare nel VII volume dei *Mathematische Schriften*, a cura di Gerhardt, presenta vari errori di trascrizione che confondono e stravolgono il contenuto matematico. È solo grazie al microfilm trasmessoci gentilmente da H.-J. Hess del Leibniz Archiv di Hannover, che ringraziamo, che siamo riuscite a comprendere il reale significato dell'algoritmo e dei risultati di Leibniz.

deve allora guardare per trarre indicazioni sul modo in cui egli intendeva "aggredire" il problema. Per adattare la dimostrazione che nell'*Essay d'une nouvelle science des nombres* lo aveva condotto a individuare i periodi nella successione dei numeri ternari e dei quadrati, mancava a Leibniz un passaggio essenziale, e cioè il legame esplicito fra i periodi di queste successioni e quelli dei naturali. Egli era però certo di poter adattare il suo algoritmo anche nei casi più generali, come si evince dalla lettura del manoscritto *Demonstratio quod columnae serierum aut numeros ex his conflatos sint periodicae* (1701), di pochi mesi posteriore all'*Essay*. In questo saggio, piuttosto criptico e complesso, egli si propone infatti di elaborare un metodo che gli consenta di formalizzare a priori il periodo della generica colonna di una qualsiasi successione numerica. Leibniz mostra qui, innanzitutto, che ogni successione di potenze o di loro combinazioni è riconducibile a una progressione aritmetica, mediante un processo di differenziazioni successive. Fornisce in proposito tre esempi: le quarte potenze dei numeri naturali, i numeri triangolari e un'espressione polinomiale del tutto arbitraria, $4x^4+6x^2-7x+11$, dove x=0, 1, 2, 3, ... Il processo cui qui si allude è lo stesso che Leibniz aveva da tempo individuato nel triangolo aritmetico, in cui ogni termine poteva essere visto come somma o come differenza di termini. Infatti lì la prima colonna è costituita da tutte unità, nella seconda si trovano i numeri naturali, nella terza i triangolari, nella quarta i piramidali e così via e si passa da una colonna alla successiva, calcolando le opportune differenze. Più precisamente, con un singolo processo di differenziazione si ricava la successione dei naturali (serie sommanda) da quella dei numeri triangolari (serie sommatrice); iterando tre volte il processo si riconduce la successione dei numeri piramidali a una progressione aritmetica di ragione 1; iterandolo quattro volte si passa dalla successione delle quarte potenze dei naturali a una progressione aritmetica di ragione 2, e così via. Il legame fra le varie successioni, espresse in notazione binaria, e i numeri naturali è quindi individuato in questo processo di differenziazioni posto a fondamento della costruzione del triangolo aritmetico e – di conseguenza – i periodi delle cosiddette "serie sommatrici" si otterranno da quelli delle "serie sommande", eseguendo su di loro operazioni di somma e di prodotto e tenendo conto dei successivi riporti.

L'ultima generalizzazione che Leibniz si propone di ottenere consiste nel dimostrare che non solo serie sommatrici di una serie periodica sono periodiche, ma si può anche stabilire lunghezza e costituzione del periodo di una generica serie sommatrice. Se, ad esempio, il periodo della successione sommanda semplice, cioè il periodo della successione "base" su cui si opera algebricamente, è costituito da 4 unità seguite da altrettanti zeri e dunque consta di 2^3 = 8 cifre, essendo 4 = 100 in base 2, dopo 8 cifre avremo 0 nella prima e nella seconda colonna sommatrice e 1 nella terza colonna sommatrice e le colonne sommatici avranno periodi di 2^4, 2^5, ecc. cifre.

Oltre a questi studi di carattere teorico sulle proprietà dell'aritmetica binaria, Leibniz va poi alla ricerca di possibili ricadute applicative nell'ambito degli strumenti di calcolo. Fra il 1679 e il 1680 elabora, infatti, due progetti di macchine calcolatrici diadiche, l'una basata su un sistema di palline rotolanti, l'altra su un meccanismo più complesso di ingranaggi. La prima soluzione, proposta nel manoscritto *De progressione diadica* (1679), prevede un apparecchio che, senza utilizzare ruote, né impulsi elettrici, ma solo un sistema di palline, consente di applicare il codice binario per la rappresentazione meccanica dei dati:

"Huiusmodi calculus fieri posset per machinam. Hoc modo potest sane facillime et sine punctis; sit si pyxis perforata ita ut foramina aperiri et claudi possint, aperta in locis respondentibus ipsis 1 clausa manens in locis respondentibus ipsis 0. Per loca aperta deponat cubulos vel orbiculos in crenas per alios nihil, et ita promota et de columnis in columnas transportata, ut multiplicatio postulat crenae repraesentent columnas nec possit orbiculum ex una crena in aliam ire nisi postea mota machinula ubi globuli effluent omnes in sequentem crenam, demto semper uno qui in foramine manet. Si quidem per portam transire vult solum nam res ita institui potest, ut dum semper simul effluant necessario, alioqui non effluent."[42]

L'utilizzo pratico di tale apparecchio era tuttavia ostacolato dalla difficoltà che si incontrava nel trasformare i numeri scritti in notazione decimale in quelli in sistema binario e viceversa: si trattava dunque di inventare un convertitore numerico da abbinare al dispositivo. Conscio dell'importanza di tale strumento, senza il quale diventava quasi impossibile adoperare la sua macchina, Leibniz vi accenna nel manoscritto *Machina arithmeticae dyadicae* (1679-80).[43] Qui egli descrive brevemente, in una cinquantina di righe, un secondo modello di calcolatrice binaria, corredato con un bozzetto che illustra un singolo meccanismo o "regola" della macchina, sottolineando esplicitamente:

"Numeros dyadicos per machinam addere, subtrahere, multiplicare et dividere facillimum est. Nam ad quemvis binarium unitatem transferre in sequens facile est. Et putem commode rotas fieri posse quatuor dentium, et cylindro inscribi 0 1 0 1, ita circuitus unus binas transportationes habebit. Facilis est et variatio in 0 et 1 in ipso multiplicante vel dividente idque sine rotis. Effici posset, quod in machina mea ordinaria non procedit, ut tam multiplicans quam multiplicator initio designentur in machina, et inde propellatur tantum regula [...]. Sed maxima difficulats est numerum dyadicum mutare in communem vel contra."[44]

Nonostante questi fugaci accenni, non resta purtroppo traccia degli apparecchi binari: essi non vengono menzionati nella corrispondenza e neppure negli scritti successivi sull'aritmetica diadica. Forse Leibniz è scoraggiato da alcuni ostacoli nella loro costruzione, ritenuti insuperabili per la meccanica di precisione dell'epoca. Fra questi la difficoltà di rendere minimo l'attrito e i giochi e il problema di rendere il movimento omogeneo.[45] Sulla base di un'approfondita conoscenza della tecnologia barocca degli

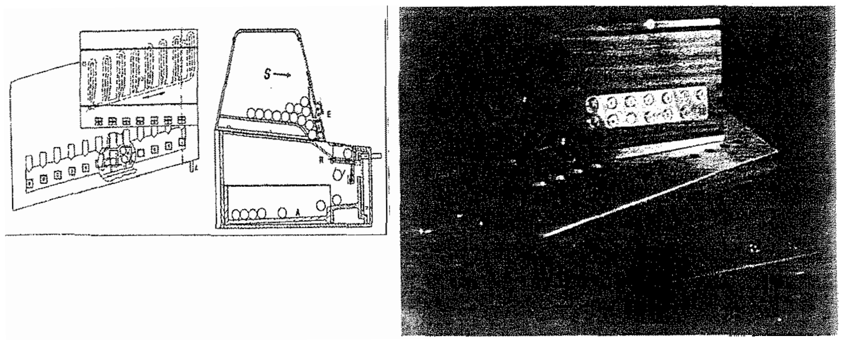
[42] "Questo tipo di calcolo può essere anche eseguito da una macchina. Certamente con grande facilità e senza sforzo, nel modo seguente: una scatola dovrebbe essere fornita di fori tali che possono essere aperti o chiusi. Dovrebbe essere aperto nella posizione che corrisponde a 1, e dovrebbe essere chiuso nelle posizioni che corrispondono a 0. Si lascino cadere dei piccoli cubi o palline attraverso i fori aperti, all'interno di canali, e nulla attraverso gli altri. Questi sono mossi in un determinato modo e slittano da colonna a colonna, come è richiesto dalla moltiplicazione. I canali dovrebbero rappresentare le colonne e nessuna pallina dovrebbe poter cadere da un canale in un altro, a meno che non accada dopo che la macchina è stata messa in moto. Allora tutte le palline corrono nel canale successivo; una che sta nel foro è sempre portata via, se tenta di passare attraverso l'uscita da sola. Il meccanismo può infatti essere organizzato in modo tale che due palline vengono necessariamente fuori insieme, o altrimenti possono non venire fuori del tutto." Cfr. von Mackensen, in Popp, Stein 2000, p. 94.

[43] Il manoscritto conservato ad Hannover, con segnatura LH 42,5, 62 r-v, non compare negli elenchi degli inediti leibniziani redatti da E. Bodemann e L. Couturat. Il primo a darne notizia è von Machensen nel 1966.

[44] La trascrizione è desunta da von Machensen 1966, pp. 256-259. ("È facilissimo sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri scritti in notazione binaria per mezzo della macchina. È infatti facile, per un qualunque numero binario, riportare un'unità al successivo. E riterrei che si possano agevolmente costruire ruote con quattro denti, e che si possa inscrivere in un cilindro 0 1 0 1, così un solo giro avrà due riporti. È altrettanto facile la variazione in 0 e 1, nello stesso moltiplicante o dividente, e ciò anche senza ruote. Si può fare in modo, cosa che non capita nella mia macchina ordinaria, che siano inseriti nella macchina all'inizio sia il moltiplicando che il moltiplicatore, e di qui sia ottenuto il risultato solo con una regola. [...] Ma la difficoltà più grande consiste nel trasformare un numero scritto in notazione diadica nel numero scritto nella notazione comune o viceversa.")

[45] Cfr. E. Aiton 1991, p. 125.

strumenti di calcolo, nel 1974 lo storico della tecnica Ludolf von Mackensen è riuscito a realizzare il prototipo della macchina diadica di Leibniz, trasformando gli informi abbozzi del filosofo tedesco in precisi disegni, sulla cui base l'ingegner Rudolf Paland ha costruito il modello funzionante di calcolatrice binaria, oggi conservato nel museo di Kassel.



Nonostante i reiterati sforzi di Leibniz, alla sua morte l'aritmetica binaria cade in un lungo oblio, restando per secoli confinata nel novero delle ricreazioni matematiche, oggetto di curiosità, più che autentico studio scientifico. Ad esempio Édouard Lucas nelle *Récréations mathématiques* (1891) descrive un gioco, il *Ventaglio misterioso*, basato sulle proprietà del sistema di numerazione in base 2. Esso consiste nell'indovinare un numero pensato da una persona, scrivendo le cifre 1 e 0, in corrispondenza delle sue risposte positive o negative. Inoltre Lucas suggerisce di utilizzare la diadica per scoprire numeri primi di notevole entità, ad esempio il numero primo 2^{61}-1. André M. Ampère nell'*Essay sur la philosophie des sciences* (1838), ricollegandosi ad un'idea di Lamark, adopera invece la numerazione binaria per stilare la classificazione di tutte le scienze, distinte in 2 regni, ognuno suddiviso in 2 sottoregni, ... per 7 volte di seguito. Ogni scienza è rappresentata da un numero di sette cifre in codice binario.

4. Peano e la numerazione binaria applicata alla stenografia

Fra l'autunno del 1898 e la primavera del 1903, anche il matematico piemontese Giuseppe Peano si occupa di aritmetica binaria, raccogliendo l'eredità degli studi compiuti in questo campo da Leibniz, del quale è profondo conoscitore ed estimatore.[46] Peano dedica alla diadica il "curioso" lavoro *La numerazione binaria applicata alla stenografia* (1898)[47], cui si affiancano alcune osservazioni inerenti la storia del sistema binario nel *Formulario di Matematica*[48] e nella corrispondenza con il suo allievo e collaboratore Giovanni Vacca.

Il primo documento che attesta un interesse da parte del logico per questo settore di studi è l'ampia *Nota sui sistemi di numerazione*, inserita nella seconda edizione del *Formulario* (Agosto 1898) e, con modifiche talora anche sostanziali, nelle successive

[46] Sui contributi di Peano nel settore della diadica cfr. Luciano, Roero 2004.

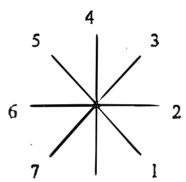
[47] G. Peano 1898m, *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 1898-99, XXXIV, pp. 47-55.

[48] G. Peano 1898h, *Formulaire de mathématiques*, t. II, § 2 *[Aritmetica]*, pp. 28-30; 1899b, *Formulaire de Mathématiques, publié par la Revue de Mathématiques. T. II, n. 3. Logique mathématique. Arithmétique. Limites. Nombres complexes. Vecteurs. Dérivées. Integrales*, pp. 65-66; 1901b, *Formulaire de Mathématiques*, t. III, pp. 75-78; 1903f, *Formulaire mathématique*, édition de l'an 1902-03, pp. 48-50

edizioni di questo trattato (1899, 1901, 1903). Realizzata probabilmente in collaborazione con Vacca, questa *Nota* risulta assai interessante, non solo per le notizie di taglio storico-bibliografico sugli antichi sistemi di numerazione, ma anche per le numerose annotazioni sulla corrispondenza fra lettere e numeri e sul modo di leggere questi ultimi, attribuendo alle lettere dell'alfabeto un valore numerico. Il matematico cuneese si propone, infatti, di fornire soluzione a uno dei problemi più spinosi che si incontrano nel campo della numerazione binaria, e cioè quello della cosiddetta "numerazione parlata", che consiste nel trovare un sistema che consenta di leggere in modo conciso ed efficace i numeri scritti in base 2, apparentemente assai più lunghi rispetto a quelli espressi in notazione decimale.

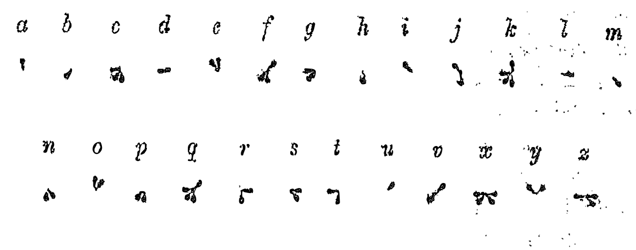
Nel breve saggio *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, presentato all'Accademia delle Scienze di Torino il 13 novembre 1898, Peano coniuga invece, in modo del tutto originale, le ricerche storiche sulla numerazione binaria con la sua esperienza nel campo della tipografia. Egli applica il sistema di numerazione a base due nell'elaborazione di una nuova forma di scrittura stenografica, delineando il progetto di una macchina che sia in grado di riprodurla.

Dopo aver sfatato il pregiudizio infondato secondo cui il sistema di numerazione binario è scomodo, vista la grande quantità di caratteri che servono per scrivere un numero appena un po' considerevole, Peano osserva che le cifre di un numero espresso nel sistema diadico si possono raggruppare ad n per volta, in modo che il numero risulta automaticamente scritto in base 2^n. I vari gruppi si possono poi rappresentare con delle figure piane composte da n tratti, in cui ogni segmento rappresenta un'unità binaria e le figure che scaturiscono da alcuni di questi tratti individuano il numero che si ottiene sommando le unità corrispondenti dei vari ordini. L'aggruppamento delle cifre binarie ad 8 per volta presenta il particolare vantaggio che questi gruppi sono all'incirca quanti sono i suoni o sillabe delle usuali lingue europee. Il matematico cuneese fornisce allora, come esempio, quello di una stella regolare ottagonale o "asterisco" dove gli otto raggi rappresentano le prime otto unità binarie[49]:



Se si prende come origine il raggio obliquo discendente e ci si muove in senso antiorario si otterranno $2^8 = 256$ figure, rappresentanti i primi 256 numeri scritti in base 2. Peano osserva che vi sono altre sillabe oltre alle 256 già "assegnate" per leggere i primi 256 numeri scritti in base 2: si tratta allora di numerarle e, successivamente, di costruire un alfabeto per scriverle. Nel caso del nostro idioma, tuttavia, si può sostanzialmente instaurare una corrispondenza biunivoca fra i numeri scritti in notazione binaria e le sillabe, applicando a queste ultime una classificazione dicotomica. Si tratterà perciò di stabilire delle opportune convenzioni di lettura e di creare un sistema di segni per rappresentare le sillabe, proprio come si fa nell'abituale pratica stenografica. A causa della loro importanza storica, anche alle singole lettere e ai numeri da 0 a 10 sono attribuiti dei simboli specifici, prendendo quelli "aventi valore più prossimo".[50]

[49] G. Peano 1898m, p. 50.
[50] G. Peano 1898m, pp. 53-54.



La forma di stenografia binaria ideata da Peano si può agevolmente stampare, telegrafare, è facile da apprendere ed è veloce da manipolare. La velocità di scrittura già aumenta con l'uso di un pennello, ma diventa ottimale se si dispone di uno specifico apparecchio in grado di riprodurre tale forma di scrittura veloce. E proprio alla realizzazione di una macchina stenografica Peano si dedica nel 1898, illustrandone il funzionamento nella nota presentata all'Accademia torinese e manifestando l'intenzione di proporla al Senato, in sostituzione della macchina fonostenografica di Antonio Michela, allora in dotazione per trascrivere le sedute.[51] Non sono purtroppo rimaste tracce di questo apparecchio, che probabilmente sfruttava un sistema di martelletti e ingranaggi simile a quello, raffinatissimo, usato negli organi. È tuttavia certo che Peano abbia effettivamente realizzato e utilizzato in prima persona la sua macchina, poiché restano tre cartoline, tutte indirizzate a Vacca fra il 1898 e il 1903, scritte in codice binario e con l'ausilio della macchina di sua invenzione.[52]

A distanza di alcuni anni, il matematico cuneese torna poi ad occuparsi di diadica nella *Nota sui sistemi di numerazione* inserita nella terza edizione del *Formulario di Matematica* (1901),[53] mostrando come si possono leggere i numeri scritti in base 2, facendo corrispondere alle 256 cifre del sistema di numerazione in base 256 altrettante sillabe. Poiché le cifre si possono leggere ad 8 per volta con una sillaba, ogni numero minore di $2^{16} = 65536$ si potrà leggere con due sole sillabe: basterà per esempio dare ai numeri

:....... .:...... ::...... ..:..... ecc.

i valori *f* *b* *p* *d*

e leggere la loro sovrapposizione con la sillaba che ne risulta, pronunciando *e* quando manca la vocale. Si avrà perciò che il numero ::....:: = 11000011=195= *pes*. Confrontando l'espressione per la lettera *p* fornita da Peano nella *Nota sui sistemi di numerazione* e nell'articolo *La numerazione binaria applicata alla stenografia* si rileva inoltre una netta

differenza: nel 1898 si ha *p* = , mentre nel 1901 la stessa consonante è indicata con *p* = !!.. .... Ciò è dovuto al fatto che nel primo caso si tratta di un singolo segno della scrittura stenografica binaria (cioè di una delle cifre della numerazione in base 256), mentre nel secondo caso si ha a che fare con il valore attribuito a un numero scritto in base 2, prima cioè di raggruppare le sue cifre a tre per volta e di considerare questo gruppo come un segno solo.

[51] G. Peano 1898m, pp. 54-55.
[52] G. Peano a G. Vacca, 2 novembre 1898, in G. Osimo 1992, N. 9; G. Peano a G. Vacca, ottobre 1899, in G. Osimo 1992, N. 22; 20 maggio 1903, in G. Osimo 1992, N. 49.
[53] G. Peano, 1901b, pp. 75-78.

Dopo il 1898 Peano non torna più a occuparsi in modo sistematico di numerazione binaria, se si eccettuano le rielaborazioni della *Nota sui sistemi di numerazione* nelle successive edizioni del *Formulario*.[54] Tuttavia il suo interesse per la diadica non è del tutto spento, come testimonia il carteggio con Vacca.

Un *trait d'union* fra le ricerche di Leibniz e di Peano sull'aritmetica binaria si ravvisa proprio in questo collaboratore di Peano che, nell'estate del 1899, si reca per primo ad Hannover per studiare i manoscritti matematici del filosofo tedesco. Probabilmente stimolato dallo studio di questi inediti e dalle riflessioni del suo maestro sulle ricadute applicative dell'aritmetica binaria, Vacca ne approfondisce la storia, che presenta nell'aprile del 1903 al secondo Congresso Internazionale di Scienze Storiche, a Roma.[55]

Una lettera di Peano e Vacca del 16 giugno 1904 rappresenta l'ultimo accenno alla diadica nella loro corrispondenza.[56] A partire dal 1905, quest'ultimo avrebbe spostato il baricentro delle sue ricerche, iniziando ad occuparsi di lingua e letteratura cinese, mentre Peano si sarebbe dedicato con crescente energia al problema dell'Interlingua. Sarebbero occorsi ancora alcuni decenni affinché la numerazione binaria uscisse dal novero delle curiosità e acquisisse un peso specifico nell'ambito della matematica, fornendo la base teorica per la programmazione informatica.

Abbiamo dunque mostrato come due matematici di epoche diverse, con impostazioni e finalità differenti, restano affascinati dalle proprietà di regolarità, armonia e periodicità dell'aritmetica binaria, le indagano dal punto di vista teorico e ipotizzano di valersene per realizzare macchine, seppure molto differenti fra loro, l'una aritmetica, l'altra stenografica.

È questo un bell'esempio dell'importanza che le fonti manoscritte inedite assumono per valutare la vastità e l'originalità dei contributi dei singoli autori, un'importanza sottolineata dallo stesso Leibniz che, nel febbraio del 1696, scriveva al suo amico Placcio:

"qui me non nisi editis novit, non novit."[57]

FONTI

Leibniz G. W.:

[A] *Sämtliche Schriften und Briefe*, 1923-, Akademie der Wissenschaften Verlag, Leipzig-Berlin

Barone F. (a cura di) 1968, *Leibniz G. W. Scritti di Logica*, Bologna, Il Mulino

[D] *Opera Omnia* (a cura di L. Dutens), 1768, Genevae, Fratres De Tournes

[GM] *Leibnizens Mathematische Schriften* (a cura di C. I. Gerhardt), Berlin, Asher & Comp., 1849-1850: voll. I-II; H. W. Schmidt, Halle, 1855-1863: voll. III-VII (rist. anast. G. Olms, Hildesheim, 1961-1962)

[GP] *Die Philosophische Schriften von G. W. Leiniz*, (a cura di C. I. Gerhardt), Weidmann, Berlin, 1875-1890 (rist. anast. G. Olms, Hildesheim, 1965)

Zacher H. J. 1973, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz*, Frankfurt a. M., Klostermann

Peano G. 2002, *Opera Omnia*, (a cura di C. S. Roero), Torino, Dipartimento di Matematica, CD-Rom N. 3.[58]

[54] Si trovano riferimenti di minor rilievo anche in G. Peano 1898d, p. 67; 1901d, p. 91 e 1902b, p. 103.

[55] La comunicazione di Vacca *Sulla storia della numerazione binaria* (v. Vacca 1903) è ricca di riferimenti ai contributi di L. Pacioli, J. Napier, F. Bacon, G. W. Leibniz, E. Lucas e, ovviamente, di G. Peano.

[56] G. Peano a G. Vacca, 16 giugno 1904, in Osimo 1992, N. 60.

[57] Leibniz, Dutens 1768, VI, p. 65. (Chi mi conosce solo dai miei scritti editi, non mi conosce affatto).

[58] Abbiamo citato gli scritti di Peano utilizzando le sigle riportate in questo cd-rom.

BIBLIOGRAFIA

AAVV 1971, *Leibniz Calcolo con zero e uno*, Milano, Etas Compass.

Cajori F. 1916, *Leibniz's "Image of Creation"*, The Monist, 26, pp. 557-565.

Costabel P. 1966a, *Les mémoires de Leibniz sur l'arithmétique binaire à l'Académie Royale des Sciences de Paris*, Studia Leibnitiana Supplementa II, Wiesbaden, Steiner, pp. 20-26.

Costabel P. 1966b, *La correspondance et les relations de Leibniz avec l'Académie Royale des Sciences en 1700-1701*, Revue d'histoire des sciences, XIX, pp. 115-132.

Couturat L. 1901, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, Alcan, rist. anast. 1961, Zürich, Hildesheim.

Couturat L. 1903, *Opuscules et fragménts inédits de Leibniz*, Parigi, Alcan.

Lolli G. 2001, *Peano matematico e grammatico*, in Roero 2001, pp. 27-35.

Luciano E., Roero C. S., *La macchina stenografica di Giuseppe Peano*, Le culture della Tecnica (Rivista dell'Archivio Storico AMMA), in corso di stampa.

Mackensen L. 1966, *Zur Vorgeschichte und Entstehung der ersten digitalen 4-Spezies-Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz*, Studia Leibnitiana Supplementa II, Wiesbaden, Steiner, pp. 34-68.

Mackensen L. 1972, *Leibniz als Ahnherr der Kybernetik – ein bischer unbekannter Leibnizscher Vorshlag einer "Machina arithmeticae dyadicae"*, Studia Leibnitiana Supplementa XIII, Wiesbaden, Steiner, pp. 255-268.

Osimo G. 1992, *Lettere di Giuseppe Peano a Giovanni Vacca*, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., N. 3, Milano, Università Bocconi.

Popp K., Stein E. 2000, *Gottfried Wilhelm Leibniz, Philosopher, Mathematician, Physicist, Engineer*, Hannover, Universität Press.

Robinet A. 1989, *La Rencontre Leibniz-Grimaldi à Rome et l'Avenir des Académies*, Studia Leibnitiana Supplementa XXXIII, Wiesbaden, Steiner, pp. 79-88.

Roero C. S. 2001, *Giuseppe Peano: matematica, cultura, società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano.

Vacca G. 1903, *Sulla storia della numerazione binaria*, Atti del Congresso Internazionale di Scienze Storiche, vol XII, pp. 63-67.

Von Collani C. 1989, *Gottfried Wilhelm Leibniz and the China Mission of the Jesuits*, Studia Leibnitiana Supplementa XXXIII, Wiesbaden, Steiner, pp. 89-103.

Wenchao L., Poser H. 1989, *Das Neueste über China (G. W. Leibnizens Novissima Sinica von 1697)*, Studia Leibnitiana Supplementa XXXIII, Wiesbaden, Steiner.

Torino, 6 novembre 2003